五、1. 设，，与正交，且，求和

解：且

五、2.（1）试把向量组Schmidt正交化，然后再单位化

解：

，，

五、2.（2）试把向量组Schmidt正交化，然后再单位化

解：

，，

五、3.（1）矩阵是不是正交矩阵，并说明理由

解：不是对角阵，即矩阵的任意两列不正交，所以矩阵不是正交的

五、3.（2）矩阵是不是正交矩阵，并说明理由

解：是对角阵，说明任意两列正交，所以矩阵是正交的

（注：若列正交，则也是对角阵，即的行也正交）

五、4.（1）设为维列向量，，令，证明是对称的正交矩阵

解：，即是对称矩阵。

，即的任意两列正交，每列的长度是1，所以是正交单位阵。即是对称的正交单位矩阵。

五、4.（2）设，都是正交矩阵，证明也是正交矩阵

解：也是正交矩阵

五、5. 设，，为两两正交的单位向量组， 证明，，也是两两正交的单位向量组

解：且

五、6.（1）求矩阵的特征值和特征向量

解：（三重）

行变换（只有一个特征向量）

五、6.（2）求矩阵的特征值和特征向量

解：

行变换

行变换

行变换

五、6.（3）求矩阵的特征值和特征向量

解： 若，则 若，则

五、7. 设为阶矩阵，证明与的特征值相同

解：，所以和的解相同。

五、8. 设阶矩阵、满足，证明与有公共的特征值和公共的特征向量

解：，即变换和都能把某个方向变为零向量，即

且的系数矩阵的行最简形式中主元的个数小于，即存在自由变量，因此存在非零的使得

此即是与的公共特征向量

五、9. 设，证明的特征值只能取1或2

解：

即所有的特征值只能是1或者2

五、10. 设为正交矩阵，且，证明是的特征矩阵

解：，

即是的特征矩阵

五、11. 设是阶矩阵的特征值，证明也是阶矩阵的特征值。

解：

若，则

五、12. 已知3阶矩阵的特征值为，， ，求

解：

五、13. 已知3阶矩阵的特征值为，，，求

解：

五、14. 设，都是阶矩阵，且可逆，证明与相似

解：与相似

五、15. 设矩阵可相似对角化，求

解：是二重根，需要两个特征值：

时才会有两个自由变量

五、16. 已知是矩阵的一个特征向量，（1）求参数，及特征向量所对应的特征值（2）问：能不能相似对角化？并说明理由

解： （1）

（三重根）

只有特征向量，即不能对角化

五、17. 设，求

解：

时，

时，

时，

五、18. 在某国，每年有比例为的农村居民移居城镇，有比例为的城镇居民移居农村。假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变。把年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为和，且，（1）求关系式中的.（2）设目前农村人口与城镇人口相等，即，求.

解： （1）

时，

时，

五、19.（1）求一个正交的相似变换矩阵，将对称矩阵化为对角矩阵

解：

五、19.（2）求一个正交的相似变换矩阵，将对称矩阵化为对角矩阵

解：

五、20. 设矩阵与矩阵相似，求，；并求一个正交矩阵，使.

解：

行变换

行变换

五、21. 设3阶矩阵的特征值为，，，对应的特征向量依次为，，，求.

解：

五、22. 设3阶对称矩阵的特征值为，，，对应的特征向量依次为，，求.

解：，，

五、23. 设3阶对称矩阵的特征值为，，与特征值的特征向量为，求.

解：

五、24. 设，，.（1）证明是的重特征值。（2）求的非零特征值及个线性无关的特征向量。

解：

，即是重特征值，非零特征值为

有个自由变量，个特征向量分别为

，是对称矩阵，所以的特征向量与的特征向量垂直，即的特征向量为

五、25.（1）设，求

解：

行变换 行变换

行变换

五、25.（2）设，求

解：

行变换

行变换

行变换

五、26.（1）用矩阵记号表示二次型

解：

五、26.（2）用矩阵记号表示二次型

解：

五、26.（3）用矩阵记号表示二次型

解：

五、27.（1）写出二次型矩阵表示的二次多项式

解：

五、27.（2）写出二次型矩阵表示的二次多项式

解：

五、28.（1）求一个正交变换，化二次型成标准型

解：

五、28.（2）求一个正交变换，化二次型成标准型

解：

五、29. 求一个正交变换，把二次曲面方程化成标准方程

解：

时，时，时，

五、30. 证明：二次型在时的最大值为矩阵的最大特征值

解：，假设，且

即是限制条件，

等号在时成立。

五、31.（1）用配方法，化二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵

解：

五、31.（2）用配方法，化二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵

解：

五、31.（3）用配方法，化二次型成规范形，并写出所用变换的矩阵

解：

五、32. 设为正定二次型，求

解：，其中，，

五、33.（1）判定二次型的正定性

解：，，，，所以二次型不是正定的

五、33.（2）判定二次型的正定性

解：，，，，所以二次型是正定的

五、34. 证明对称矩阵为正定的充分必要条件是：存在可逆矩阵，使，即与单位矩阵合同

解：正定的

其中